FLUSSO E CIRCUITAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO

PREMESSA

Il concetto di campo elettromagnetico fu intuito da **Faraday** e precisato da **Maxwell**. Può essere espresso dicendo che la presenza di cariche elettriche in quiete o in moto altera, punto per punto, lo spazio circostante (anche se vuoto di materia) ed esso diventa sede d'azioni di forza che si esplicano su una carica che lo esplora.

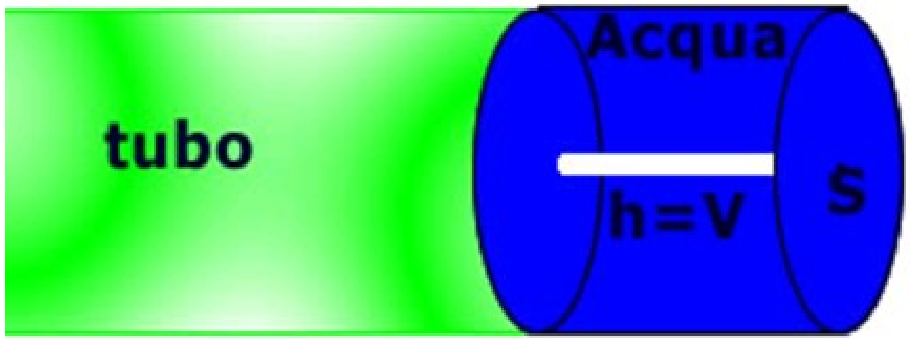
Nel linguaggio della fisica l'espressione **campo** indica, **una porzione di spazio in ogni punto del quale sia misurabile una data grandezza fisica**, che si chiama genericamente **grandezza del campo**.

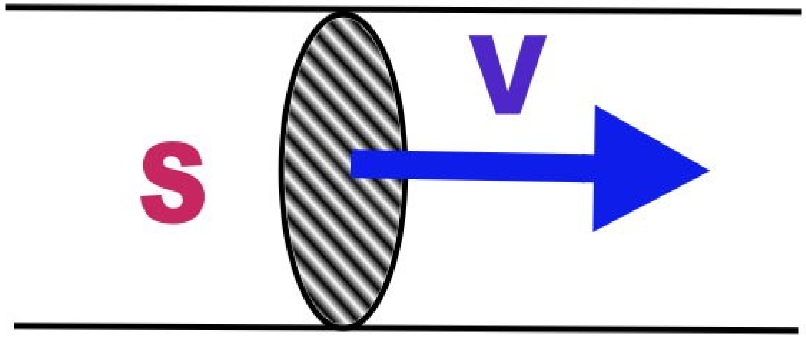
In particolare nel linguaggio della fisica attuale il termine campo è usato anche per indicare la grandezza del campo: infatti con il termine campo magnetico si indica sia la regione dello spazio in cui sono sensibili ''azioni magnetiche'', sia il vettore induzione magnetica, **B**, che è **la grandezza vettoriale oggi assunta come grandezza descrittiva principale del detto campo**

Tutto l'elettromagnetismo concerne le relazioni tra questo campo e le sue cause (carica e corrente) nonché le relazioni tra i due vettori che lo costituiscono (E e B).

Il **flusso** e la **circuitazione** sono gli strumenti concettuali necessari per lavorare con i campi.

PORTATA DI UNA TUBATURA



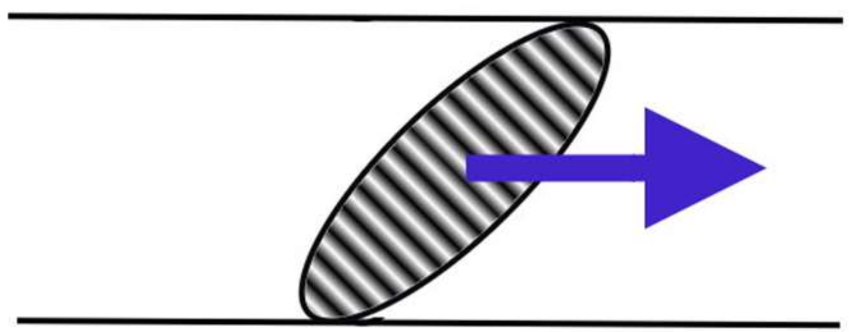


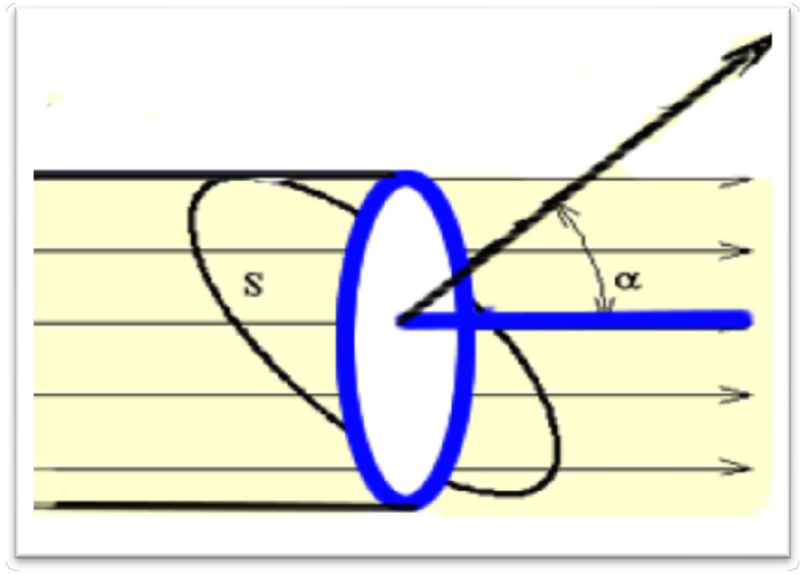
Volume di fluido che attraversa una sezione della tubatura in un secondo.
Ma anche...prodotto della sezione S per la velocità V

PORTATA = S·V

PORTATA DI UNA TUBATURA

Se la superfice S non è perpendicolare alla direzione del moto, la portata sarà comunque data dal volume di fluido che attraversa la superficie S’ perpendicolare alla direzione del moto

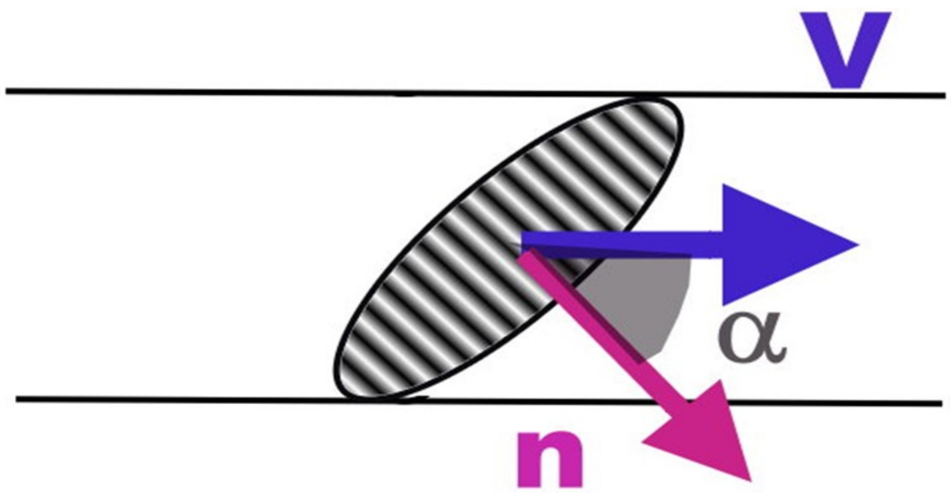




Se La superficie inclinata è S, l’area della superficie normale al moto S’, avrà un'estensione pari a $S\cos\alpha$ e la portata allora varrà:

$$(S\cos\alpha)\cdot v$$

In termini vettoriali la portata è data dal prodotto scalare tra la velocità e il vettore superficie (vettore diretto perpendicolarmente alla superficie e modulo pari alla sua area).

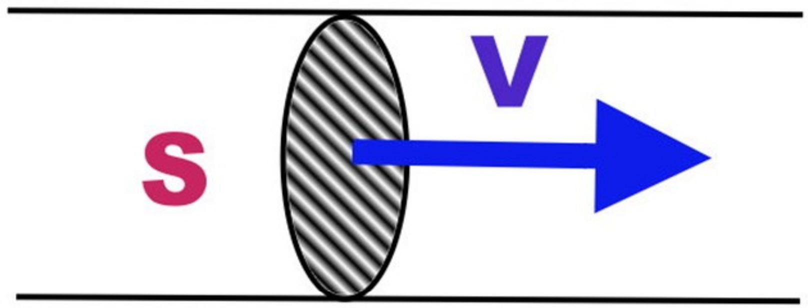


FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Per introdurre il concetto di flusso per il campo elettrico, gravitazionale e magnetico partendo dalla definizione di portata **dobbiamo sostituire alla velocità il vettore intensità di campo**.

Campo	Intensità di campo	Flusso
GRAVITAZIONALE	**g(r)**	$\Phi = S \cdot g(r) \cdot \cos \alpha$
ELETTRICO	**E(r)**	$\Phi = S \cdot E(r) \cdot \cos \alpha$
MAGNETICO	**B(r)**	$\Phi = S \cdot B(r) \cdot \cos \alpha$

Per poter scrivere quanto scritto però, devono essere verificate le seguenti premesse:



- La superficie S è piana
- Il vettore V intensità è uniforme in ogni punto della superficie.

- **Se non valgono queste premesse è possibile ugualmente determinare il flusso totale?**

Si, ma occorre suddividere la superficie in tante porzioni infinitesime così piccole che ognuna si possa considerare piana e il vettore intensità di campo uniforme.

Applicando la definizione di flusso su ogni superficie infinitesima, il flusso totale è uguale alla somma dei flussi elementari.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i$$

$$\Phi = s_1 \cdot v_1 \cdot \cos \alpha_1 + s_2 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha_2 + s_2 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha_2 + \dots$$

Ancora sulla portata di un tubo

- Osservando un corso d’acqua notiamo:
  Che esso è alimentato da sorgenti a partire dalle quali l’acqua fluisce;

Il concetto di flusso di un vettore permette di caratterizzare il fluire delle sorgenti.

Infatti, se il flusso di un vettore rappresenta la portata, allora considerando tale flusso attraverso una superficie è chiusa e :

- Se vi sono sorgenti il flusso è positivo
- se al suo interno vi sono dei pozzi, il flusso è negativo;
- se non vi sono né sorgenti né pozzi, oppure vi sono sia sorgenti che pozzi, il flusso è nullo.

Tali concetti possono essere generalizzati per qualsiasi campo, compreso il campo elettromagnetico.

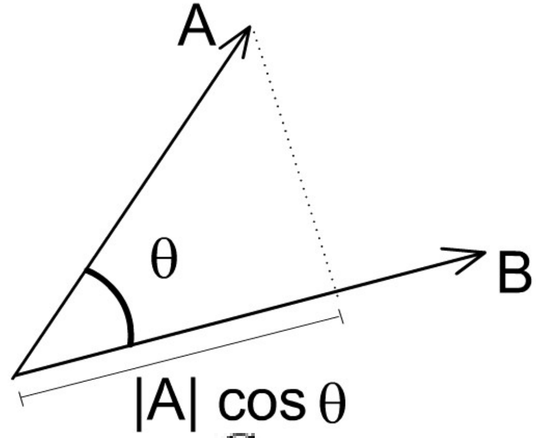
FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO

Poiché per il campo magnetico le sorgenti sono le correnti, si può dimostrare che **per una qualsiasi superficie chiusa S, il flusso di B è nullo.**

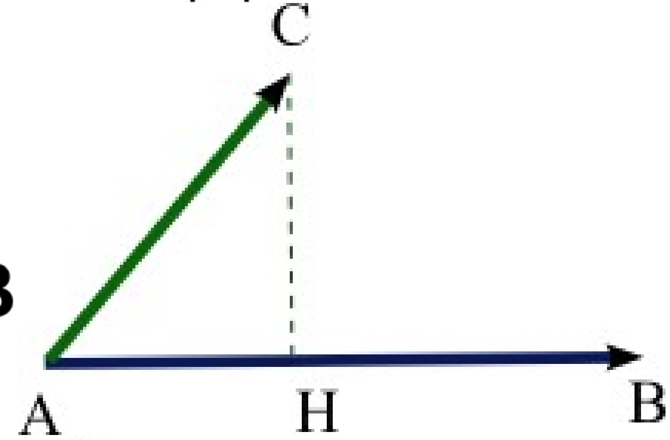
$$\Phi_S(\vec{B}) = 0$$

Questo è il **teorema di Gauss per il campo magnetico** che permette di individuare la posizione di una sorgente e dare una valutazione quantitativa del campo

L’operazione di
CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO

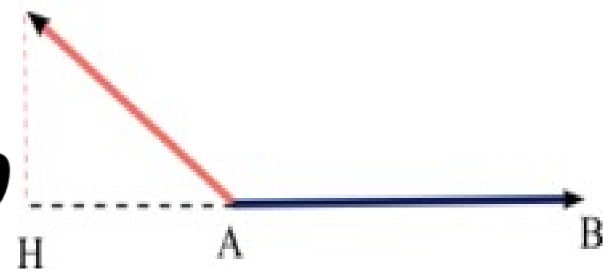


Perché calcolare IL PRODOTTO SCALARE tra due vettori lungo una linea chiusa?



Geometricamente il **prodotto scalare** P **tra due vettori** si può interpretare come il prodotto delle lunghezze della proiezione di **A** su **B** e di **B** (o viceversa)

$$P = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB cos\theta$$



TENUTO CONTO DEL **SEGNO DI $\boldsymbol{cos\theta}$**

Dunque dal punto di vista puramente matematico il prodotto scalare è commutativo.

MA IN FISICA E' LO STESSO? IN QUALI CASI UTILIZZERO' QUESTA OPERAZIONE? COSA POTRO' DESCRIVERE PER MEZZO DI QUESTA OPERAZIONE?

Utilizzo l'operazione di prodotto scalare tra due grandezze **A** e **B ogni volta** che per quantificare una terza grandezza P devo considerare solo il contributo della componente di **A** lungo **B** (E NON VICEVERSA), perché la componente ortogonale non apporta alcun contributo alla descrizione di P

Come per esempio nel caso del lavoro di una forza:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{l} = Flcos\theta$$

CIRCUITAZIONE = SOMMA DEI PRODOTTI SCALARI LUNGO UN CAMMINO CHIUSO

$$C_\gamma(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{l}_i = v_1 l_1 cos\theta_1 + v_2 l_2 cos\theta_2 + \cdots$$

Tale strumento matematico è un ampliamento dell'operazione di prodotto scalare tra due grandezze.

IN FISICA si potrà usare nel caso in cui a partire da due grandezze **V** ed **l** sia necessario quantificare una terza grandezza per la quale:

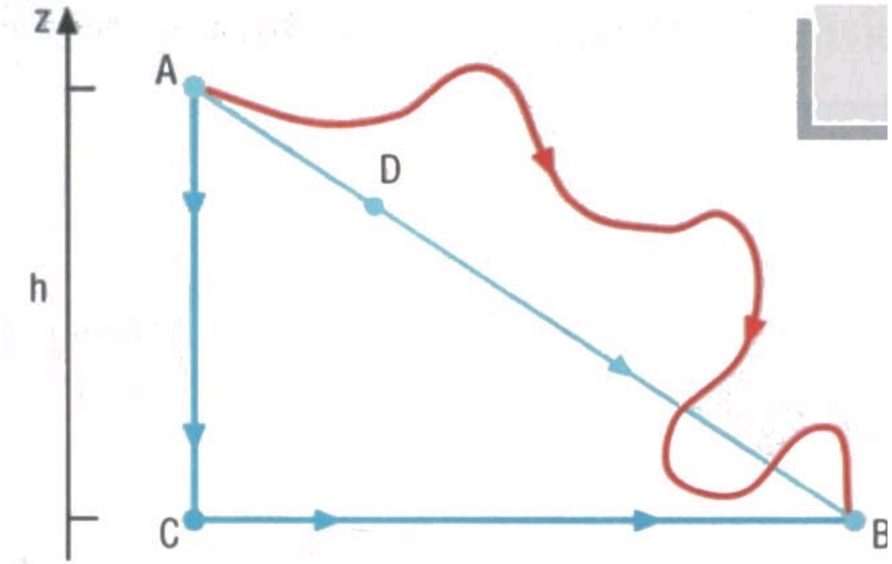
1. Occorre considerare solo il contributo (**V$_l$**) della componente di **V** lungo **l**
2. il vettore **V** potrebbe non essere costante
3. oppure il contributo complessivo delle componenti **V$_l$** alla grandezza potrebbe DIPENDERE DA COME VENGONO SCELTI I SINGOLI TRATTI l cioè dal cammino γ.

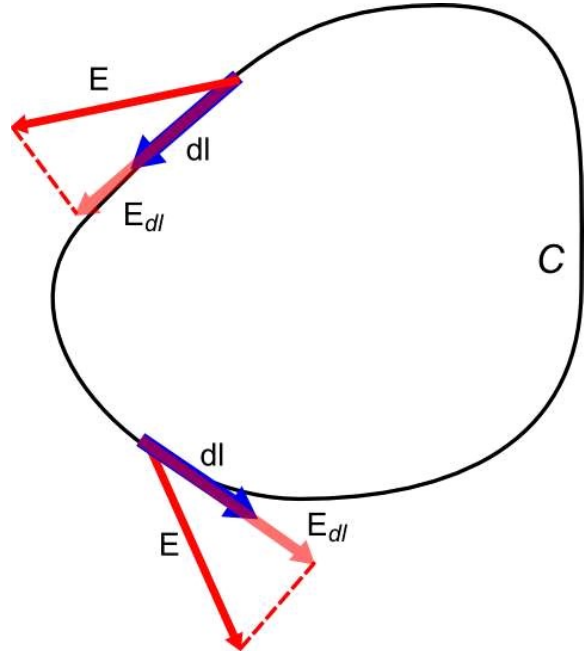
FORZA GRAVITAZIONALE e FORZA DI COULOMB

L'operazione di circuitazione del campo lungo una linea chiusa γ, in questi due casi si calcola sommando i contributi della forza lungo ciascun tratto infinitesimo dl di curva

Come è noto, il prodotto scalare F·dl quantifica in ciascun tratto il lavoro compiuto da F, cioè l'energia necessaria per spostare il punto di applicazione di F di dl;

Dunque la somma di tutti i contributi lungo una qualunque linea chiusa, NEI DUE CASI quantifica il lavoro compiuto per tornare nel punto di partenza cioè l'energia totale spesa o acquisita durante il 'giro'





Un campo di forze la cui circuitazione sia nulla si chiama campo conservativo.

Tale nome fa riferimento al fatto che in un tale **campo di forza** qualunque spostamento chiuso compia il punto di applicazione della forza, il lavoro compiuto da quest'ultima è nullo.

In altre parole **l'energia totale nel punto di arrivo è esattamente uguale a quella nel punto di partenza,** dunque:

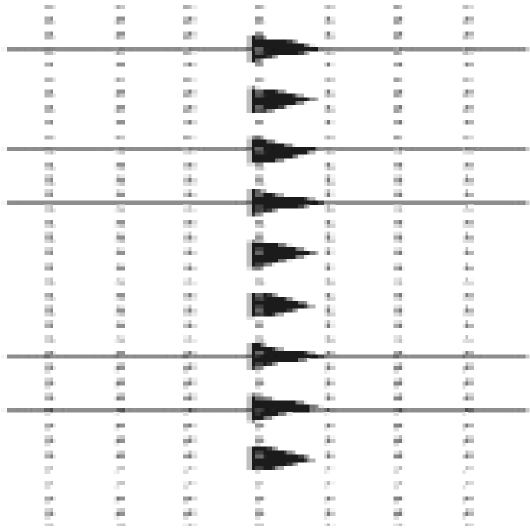
1. si può dire che **si è «conservata» l'energia totale in gioco nel campo** e
2. che la conservatività di un campo ha una stretta attinenza con l'energia potenziale.

ATTENZIONE!!!

Se NON SI TRATTA DI UN CAMPO DI FORZA, **questa interpretazione energetica della circuitazione non è possibile in termini così diretti**.

I FLUIDI

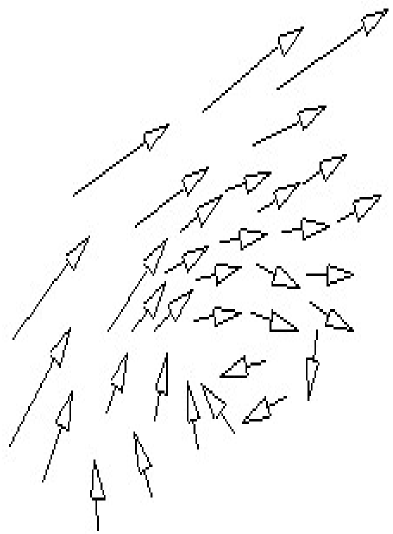
Applichiamo la definizione di circuitazione al caso di un **fluido che si muove c**on velocità costante in ogni punto dello spazio. La circuitazione di **v** lungo una linea chiusa TUTTA AL SUO INTERNO è:



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{l}_i = v_1 l_1 cos\theta_1 + v_2 l_2 cos\theta_2 + \cdots$$

Il cui risultato è nullo qualunque linea chiusa venga presa in considerazione. Si dice che **il campo è irrotazionale**.

Nel caso in cui invece il **moto del fluido** sia **vorticoso** attorno ad alcuni punti, si hanno due casi:



1. se si considera una linea chiusa che abbraccia un vortice allora la somma della circuitazione è diversa da zero.
2. Se invece la linea chiusa non abbraccia il vortice la circuitazione totale è nulla

- In tale esempio si vedono diverse questioni concettuali:
- La circuitazione **in questo caso non riguarda direttamente l’energia** spesa o acquistata lungo il cammino chiuso.
- Il valore della circuitazione **dipende** oltre che dalla forma del campo **dal percorso chiuso scelto** per calcolarla. Tale dipendenza è ciò mediante cui si può distinguere se la linea considerata racchiude un vortice oppure no.

Il teorema di Ampère

Applichiamo la definizione di circuitazione al caso di un **campo magnetico generato da correnti in condizioni di stazionarietà**. Queste possono esistere solo grazie a CIRCUITI CHIUSI.

Pertanto, se scegliamo una linea geometrica arbitraria chiusa γ, le **linee delle correnti** rispetto ad essa possono essere o **concatenate** (cioè non possono essere sfilate da γ) o **non concatenate** (cioè possono essere allontanate indefinitamente da γ).

Ricordiamo alcuni **fatti sperimentali noti**:

Un **filo rettilineo ‘‘infinito’’ percorso da corrente** genera un campo magnetico con le seguenti proprietà:

1. Per l’intensità del campo vale la LEGGE DI BIOT e SAVART secondo cui essa aumenta linearmente con I ma decresce linearmente con r.
2. Le linee di campo sono circonferenze concentriche attorno al filo
3. il verso delle linee di campo è legato al verso della corrente

1. È nota **l'interazione tra due fili percorsi da corrente**

Correnti parallele e concordi si attraggono mentre correnti parallele e discordi si respingono. Da tale interazione si giungere alla definizione dell'unità di misura della corrente (ampere)

1. Tale interazione mette in luce **il principio di sovrapposizione per il campo magnetico**.

Se la corrente i1 genera un campo magnetico $\mathbf{B_1}$ e la corrente i2 genera un campo magnetico $\mathbf{B_2}$, il campo totale in ogni punto dello spazio se entrambe le correnti sono presenti è dato da

$$\mathbf{B_T=B_1+B_2}$$

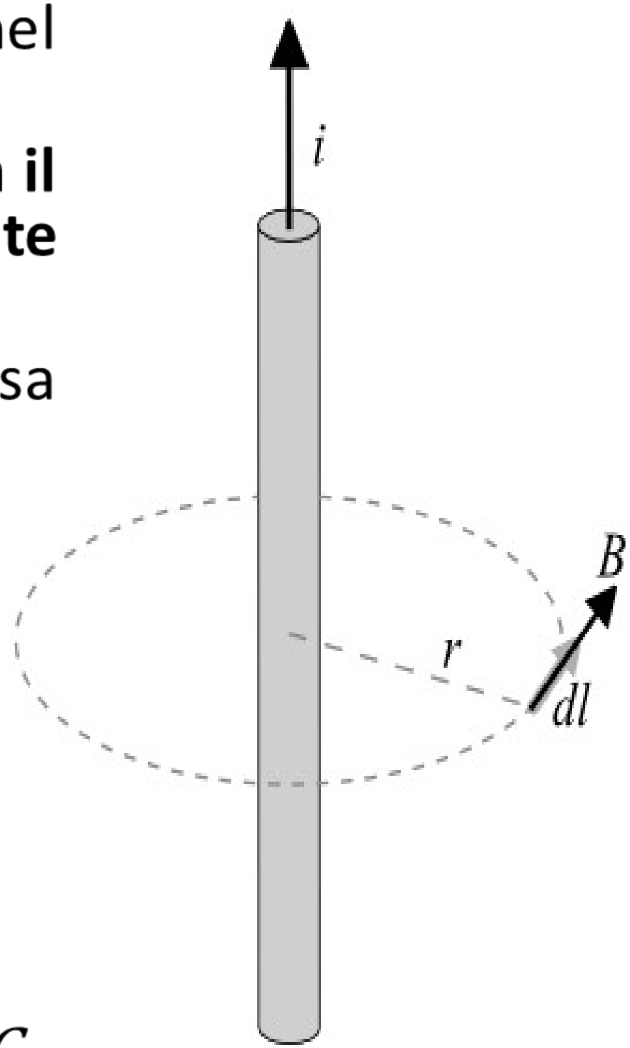
Il teorema della circuitazione per un filo rettilineo

1. Il vettore campo magnetico **B** è **tangente** in ogni punto alle linee di campo (circonferenze concentriche con centro nel filo).
2. Inoltre **in ogni punto della circonferenza il campo magnetico ha intensità costante** data dalla legge di Biot Savart.
3. La circuitazione di **B** lungo una linea chiusa concatenata alla corrente è:

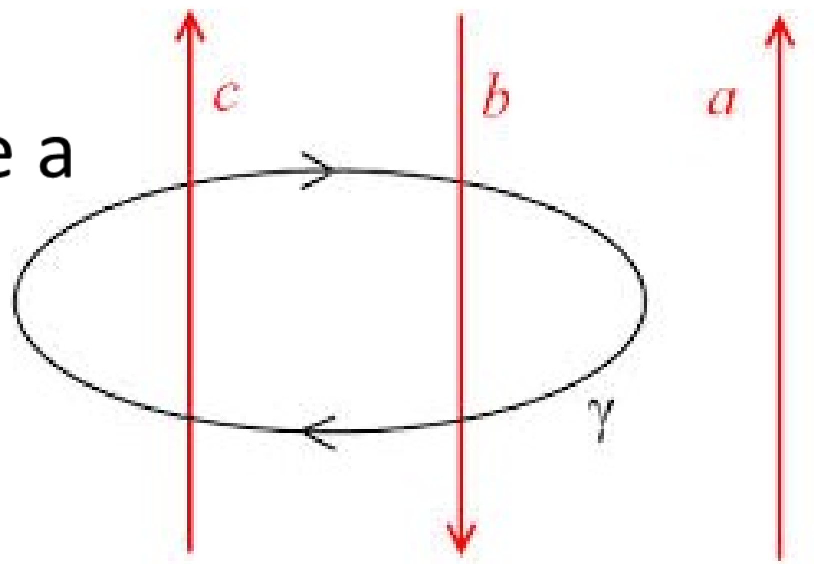
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{B} \cdot \vec{l}_i = Bl_1 cos\theta_1 + Bl_2 cos\theta_2 + \cdots$$

$$C_\gamma(\vec{v}) = B \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 i$$

4. Se cambia il verso di i cambia il segno di C.



- Se **la curva non è concatenata alla corrente** (come per il filo a) i singoli contributi non avranno tutti segno positivo, anzi con semplici considerazioni di simmetria si vede che a due a due si annullano pertanto



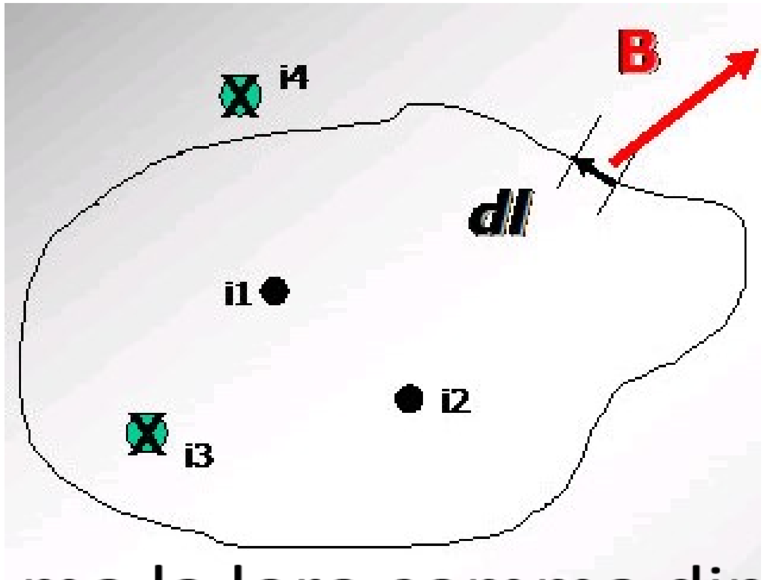
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{B} \cdot \vec{l}_i = Bl_1cos\theta_1 + Bl_2cos\theta_2 + \cdots = 0$$

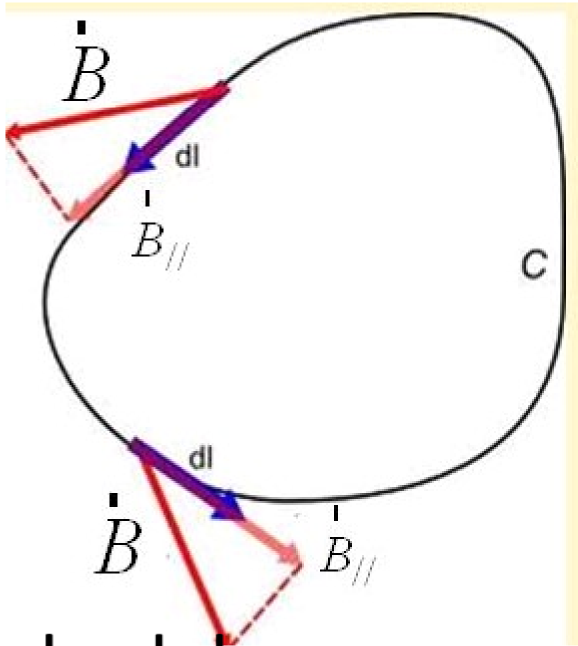
QUINDI IL VALORE DELLA CIRCUITAZIONE DI B E' PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI CONCATENATE ALLA CURVA

IN GENERALE

Nel caso in cui la curva concatenata abbia forma qualsiasi e le correnti siano n, i singoli contributi avranno valori distinti

$$C_\gamma(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \vec{l}_i = B_1 l_1 cos\theta_1 + B_2 l_2 cos\theta_2 + \cdots$$





ma la loro somma dipenderà solo dal numero e dal verso delle correnti concatenate

CONCLUSIONI

Come per il caso dei fluidi, **il valore della circuitazione del CAMPO MAGNETICO dipende dal percorso chiuso scelto** per calcolarla. Tale variazione discrimina tra i casi in cui la linea considerata racchiude delle sorgenti di campo o meno e si esprime mediante il teorema di Ampère:

$$C(\vec{B}) = \mu_0(i_1 + i_2 - i_3)$$

La circuitazione del campo magnetico **non può essere collegata direttamente a considerazioni riguardo l'energia** spesa o acquistata lungo il cammino chiuso.